Corrigé

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est donc un parallélogramme.

2. $ACEF$ est un parallélogramme si, et seulement si,

   $$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F-0=2-3\\y_F-1=2-1\\z_F-1=4-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-1\\y_F=2\\z_F=4\end{cases}.$$

3. F est le milieu de $[AI]\Leftrightarrow\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=2x_F-x_A=-2\\y_I=2y_F-y_A=3\\z_I=2z_F-z_A=7\end{cases}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-2-3\\3-1\\7-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-5\\1\\6\end{pmatrix}$.

   Par ailleurs, $\begin{cases}x_J=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}\\y_J=\frac{2+2}{2}=2\\z_J=\frac{4+4}{2}=4\end{cases}$ donc $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-3\\2-1\\4-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\1\\3\end{pmatrix}$.

On a finalement $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CJ}$ donc J est le milieu de $[IC]$.

Voici une autre méthode possible.

D'après l'énoncé, on a :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{JE}$.

$\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{JI}$

On a ainsi $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JI}$ donc J est le milieu de $[CI]$.